Colles de Maths - semaine 6
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- $\mathbb{R}$ est archimédien
- Existence et unicité de la partie entière
- Densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$

Révisions chapitres précédents

Exercice 1

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivables telles que
$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u).$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues telles que
$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u).$$

Exercice 2 Résoudre l'équation $(1-x^2)y' + 2xy = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $x^2y'' - 2y = x$.

1. Quelle équation différentielle vérifie la fonction $z : t \in \mathbb{R} \longmapsto y(e^t)$?
2. En déduire une résolution de l'équation initiale.

Les réels

Exercice 4 Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b.$$

1. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2. Exhiber un exemple tel que l'on ait $\sup A = \inf B$ et
$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a < b.$$

Exercice 5 Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on appelle partie entière supérieure de x et on note $\lceil x \rceil$ l'unique entier vérifiant l'inégalité $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$.

1. Quel vaut $\lceil x \rceil$ en termes de $\lfloor x \rfloor$
2. Que vaut $\lfloor -x \rfloor$ en termes de $\lceil x \rceil$?
3. Tracer le graphes des fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup A - \inf A.$$

(On appelle diamètre de A cette quantité.)

Exercice 7 Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+4}$. Déterminer $\sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et $\inf\limits_{\mathbb{R}} f$.

Exercice 8 **(Connexité des segments)**
Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On appelle ouvert de I toute partie $U \subset I$ telle que

$$\forall x \in U,\, \exists \epsilon > 0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap I \subset U.$$

Montrer que I est connexe, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire sous la forme

$$I = U \cup V \text{ avec } U \neq \emptyset,\, V \neq \emptyset, \text{ ouverts disjoints de } I.$$

Indication : Si une telle écriture existe, considérer l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, [a,x] \in U\}$.

Exercice 9 **(Théorème de structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$)**
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in G^2,\, x-y \in G.$$

Montrer que :

— Soit il existe $a \in G$ tel que $G = a\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $\{ak,\, k \in \mathbb{Z}\}$).

— Soit G est dense dans $\mathbb{Z}$.

En déduire une preuve du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.